

1 - تكامل دالة مستمرة

1. تعريف

f دالة معرفة ومستمرة على مجال I . a و b عددان من I .
 F دالة أصلية للدالة f على المجال I .
 العدد $F(b) - F(a)$ يسمى التكامل من a إلى b للدالة f .
 يرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x) dx$ و يقرأ التكامل من a إلى b لـ $f(x)$ تفاضل x .
 و نكتب $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

ملاحظة: العدد $\int_a^b f(x) dx$ يتعلق بالدالة f ، a و b فهو مستقل عن المتغير x .
 أي أن $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz$

2. التفسير الهندسي

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$. المنحنى الممثل للدالة f في هذا المعلم.

الدالة f موجبة على المجال $[a; b]$

العدد الحقيقي الموجب $\int_a^b f(x) dx$ هو مساحة الحيز A

للمستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C}) و محور الفواصل

و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.

نكتب: $A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

الدالة f سالبة على المجال $[a; b]$

العدد الحقيقي $\int_a^b f(x) dx$ سالب و العدد الحقيقي

الموجب $-\int_a^b f(x) dx$ هو مساحة الحيز B

للمستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C}) ، محور الفواصل

و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.

نكتب: $B = -\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$

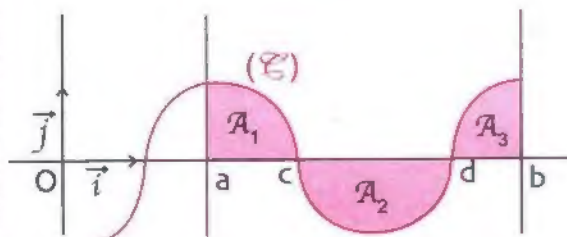
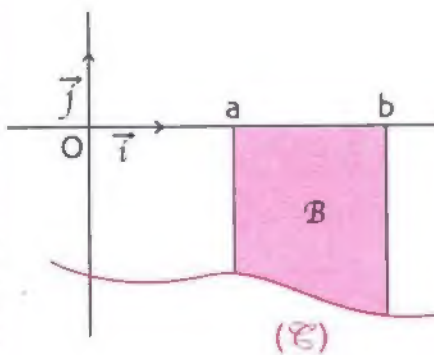
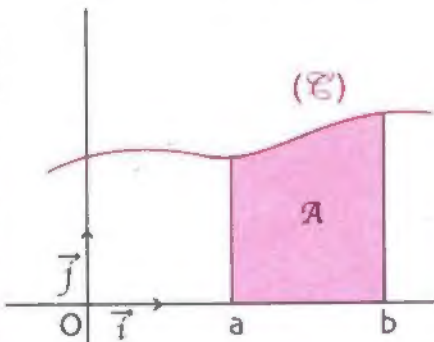
إشارة الدالة f تتغير على المجال $[a; b]$

الدالة f معرفة ومستمرة على المجال $[a; b]$.

العدد الحقيقي $\int_a^b |f(x)| dx$ هو مساحة الحيز A

للمستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C}) و محور الفواصل

و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.



في الشكل يظهر أن : $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$
 $= \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$

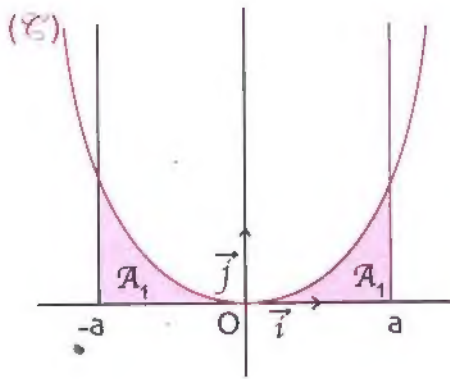
II - الخواص

خاصية الخطية للتكامل

ف و g دالتان معرفتان و مستمرتان على مجال I . a و b عددان من المجال I . من أجل كل عددين حقيقيين α و β :

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

شعبية الدالة



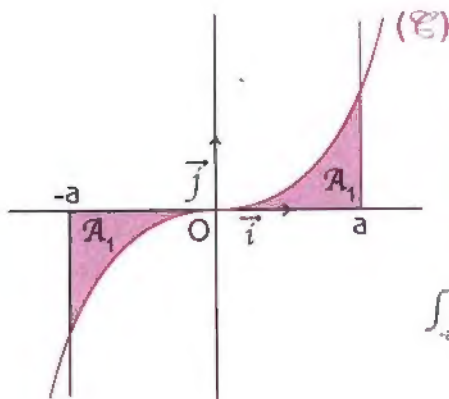
ف دالة معرفة و مستمرة على مجال I .
 إذا كانت f زوجية على I .
 فإن من أجل كل عدد a من I :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

في الشكل المقابل، الدالة f موجبة

إذن $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \mathcal{A}_1$

(و إذا كانت f سالبة فإن $\int_{-a}^a f(x) dx = -2 \mathcal{A}_1$)



• إذا كانت f فردية على I .

فإن من أجل كل عدد a من I : $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

في الشكل المقابل، الدالة f موجبة على $[0; a]$

و سالبة على $[-a; 0]$. إذن $\int_{-a}^a f(x) dx = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1 = 0$

علاقة شال

ف دالة معرفة و مستمرة على مجال I .

• من أجل كل عدد a من I : $\int_a^a f(x) dx = 0$

• من أجل كل أعداد a, b و c من I : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ (علاقة شال)

نتيجة : من أجل كل عددين a و b من I : $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

(أو أيضا : $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$)

مبرهنة (إيجابية التكامل)

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a ; b]$.

إذا كان من أجل كل عدد x من $[a ; b]$ ، $f(x) \geq 0$ فإن $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

مبرهنة

f و g دالتان معرفتان و مستمرتان على المجال $[a ; b]$.

إذا كان من أجل كل عدد x من $[a ; b]$ ، $f(x) \leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

مبرهنة (متباينة المتوسط)

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a ; b]$.

إذا كان m و M عددين حقيقيين حيث من أجل كل عدد x من $[a ; b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$.

فإن $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

التفسير الهندسي

بفرض أن f موجبة على $[a ; b]$.

* يكون $m(b-a)$ هي مساحة المستطيل

الذي بعده $b-a$ و m .

$M(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعده $b-a$ و M .

$\int_a^b f(x) dx$ هي مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C}) ،

محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x=a$ و $x=b$.

القيمة المتوسطة للدالة

f دالة معرفة و مستمرة و موجبة على مجال $[a ; b]$.

تعريف

القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[a ; b]$ هي العدد الحقيقي $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

مبرهنة (حصار القيمة المتوسطة)

إذا كان m و M عددين حقيقيين حيث من أجل كل عدد x من $[a ; b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$.

فإن $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$.

III - التكاملات والدوال الأصلية

مبرهنة

إذا كانت f مستمرة على مجال I و $a \in I$ فإن الدالة F المعرفة على I كما يلي :

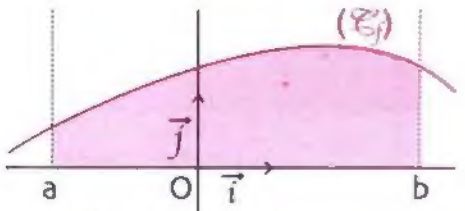
$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f التي تنعدم عند a .

المكاملة بالتجزئة

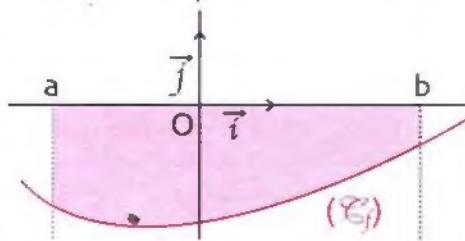
إذا كانت u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I حيث الدالتان u' و v' مستمرتان على I .
فإن $\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt$
هذه الطريقة لحساب $\int_a^b u'(t) v(t) dt$ تسمى المكاملة بالتجزئة.

حساب مساحات محدودة بمنحن

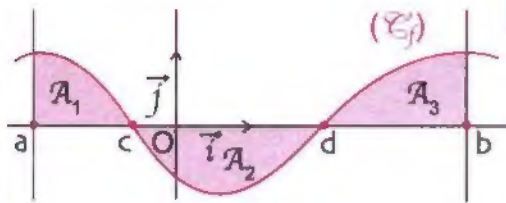
f دالة مستمرة على مجال I : a و b عددان من I حيث $a < b$.
(\mathcal{C}_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 \mathcal{A} مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C}_f) و محور الفواصل و المستقيمين
ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.
مبرهنة



• إذا كان من أجل كل عدد x من المجال $[a; b]$ ،
 $f(x) \geq 0$ فإن $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$ (وحدة المساحات)



• إذا كان من أجل كل عدد x من المجال $[a; b]$ ،
 $f(x) \leq 0$ فإن $\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx$ (وحدة المساحات)



• إذا كانت إشارة f تتغير على $[a; b]$ ،
فإن $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx$ (وحدة المساحات)

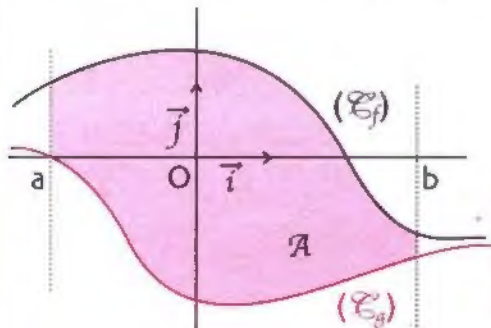
ملاحظة : في الشكل المقابل،

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$$

$$\mathcal{A} = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

حساب مساحة محدودة بمنحنين

f و g دالتان مستمرتان على المجال I : a و b عددان من I حيث $a < b$.
(\mathcal{C}_f) و (\mathcal{C}_g) المنحنيان الممثلان للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ للمستوي.



مبرهنة

\mathcal{A} هي المساحة المحدودة بالمنحنين (\mathcal{C}_f) و (\mathcal{C}_g)
و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = b$.

إذا كان من أجل كل عدد x من I : $f(x) \leq g(x)$
فإن $\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$ (وحدة المساحات)

ملاحظة : إذا كان $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ و $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$

فإن وحدة المساحات هي 1cm^2 .

إذا كان $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ و $\|\vec{j}\| = 3\text{cm}$ فإن وحدة المساحات هي 6cm^2 .

فإن $A = 5 \times 6\text{cm}^2 = 30\text{cm}^2$

حساب حجوم

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد من الفضاء. (\mathcal{E}) جزء من الفضاء محدود بالمستويين ذوي المعادلتين $z = a$;

$z = b$ و V حجمه.

مبرهنة

t ينتمي إلى المجال $[a; b]$. ليكن $S(t)$ مساحة السطح الناتج عن تقاطع الجزء (\mathcal{E}) مع المستوي ذي المعادلة $z = t$ أي المستوي العمودي على (Oz) في $P(0; 0; t)$ و الموازي للمستوي (oxy) .

إذا كانت الدالة S مستمرة على $[a; b]$ فإن $V = \int_a^b S(t) dt$ (وحدة الحجم).

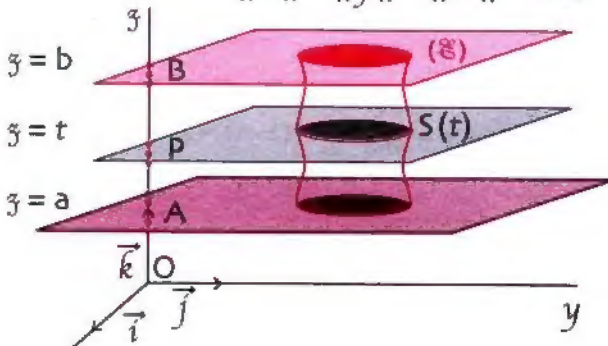
ملاحظة : إذا كان المعلم متعامدا و متجانسا $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\text{cm}$

فإن وحدة الحجم هي 1cm^3 .

إذا كان المعلم متعامدا حيث $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

و $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$ و $\|\vec{k}\| = 3\text{cm}$

فإن وحدة الحجم هي 6cm^3 .



حجم مجسم دوراني محوره هو محور القواصل

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد و متجانس من الفضاء. ليكن (\mathcal{E}_f) المنحني الممثل لدالة f المستمرة

على مجال $[a; b]$ حيث $a < b$ في المستوي ذي المعادلة $z = 0$ (أي المستوي (oxy)).

مبرهنة

عندما يدور المنحني حول المحور $(O; \vec{i})$ فإنه يولد مجسما

دورانيا حجمه $V = \int_a^b \pi [f(t)]^2 dt$ حيث $t \in [a; b]$.

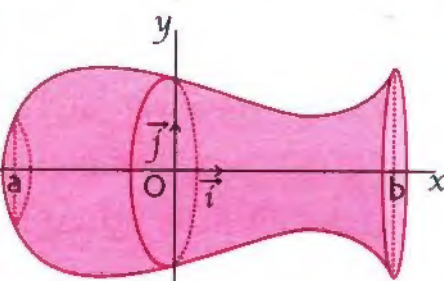
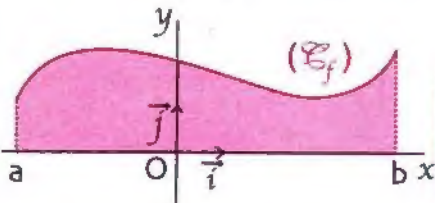
ملاحظة : بتطبيق المبرهنة السابقة و بملاحظة أن مساحة الحيز

المستوي المحصل عليها بتقاطع الجزء (\mathcal{E}) مع المستوي ذي

المعادلة $x = t$ ، $t \in [a; b]$ هي مساحة القرص الذي نصف

قطره $|f(x)|$. إذن $S(t) = \pi [f(t)]^2$

و بالتالي $V = \int_a^b \pi [f(t)]^2 dt$



1 حساب تكامل دالة مستمرة

تقريب

احسب التكاملات التالية :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - x + 1) dx & : \int_{-2}^2 (4x + 5) dx & : \int_{-1}^4 3 dx \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x - 3\sin x) dx & : \int_0^{\pi} \sin x dx & : \int_0^{\pi} \cos x dx \end{aligned}$$

حل

حساب التكامل $\int_{-1}^4 3 dx$

الدالة $f: x \mapsto 3$ ثابتة إذن f معرفة و مستمرة على \mathbb{R} .

و بالتالي فهي مستمرة على المجال $[-1; 4]$.

الدالة F المعرفة على $[-1; 4]$ كما يلي : $F(x) = 3x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[-1; 4]$.

$$\int_{-1}^4 3 dx = F(4) - F(-1) = 3 \times 4 - 3(-1) = 12 + 3 = 15$$

$$\int_{-1}^4 3 dx = 15 \quad \text{إذن}$$

حساب التكامل $\int_{-2}^2 (4x + 5) dx$

الدالة $f: x \mapsto 4x + 5$ معرفة و مستمرة على \mathbb{R} . فهي مستمرة على المجال $[-2; 2]$.

الدالة F المعرفة على $[-2; 2]$ كما يلي : $F(x) = 2x^2 + 5x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[-2; 2]$.

$$\int_{-2}^2 (4x + 5) dx = F(2) - F(-2) = (2(2)^2 + 5 \times 2) - (2(-2)^2 + 5(-2))$$

$$= (8 + 10) - (8 - 10) = 20$$

$$\int_{-2}^2 (4x + 5) dx = 20 \quad \text{و بالتالي}$$

حساب التكامل $\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx$

الدالة $f: x \mapsto x^2 - x + 1$ معرفة و مستمرة على \mathbb{R} . فهي مستمرة على المجال $[0; 1]$.

الدالة F المعرفة على $[0; 1]$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0; 1]$.

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = F(1) - F(0) = \left[\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 + 1 \right] - \left[\frac{1}{3} \times 0 - \frac{1}{2} \times 0 + 0 \right]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = \frac{5}{6} \quad \text{و بالتالي}$$

حساب التكامل $\int_0^{\pi} \cos x dx$

الدالة $f: x \mapsto \cos x$ معرفة و مستمرة على \mathbb{R} . فهي مستمرة على المجال $[0; \pi]$.

الدالة F المعرفة على $[0; \pi]$ كما يلي : $F(x) = \sin x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0; \pi]$.

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = F(\pi) - F(0) = \sin \pi - \sin 0 = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = 0 \quad \text{و بالتالي}$$

• حساب التكامل $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

الدالة $f: x \mapsto \sin x$ معرفة و مستمرة على \mathbb{R} . فهي مستمرة على المجال $[0; \pi]$.

الدالة F المعرفة على $[0; \pi]$ كما يلي : $F(x) = -\cos x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[0; \pi]$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = F(\pi) - F(0) = -\cos \pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$$

وبالتالي $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 0$

• حساب التكامل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx$

الدالة $f: x \mapsto 3\cos x - 2\sin x$ معرفة و مستمرة على \mathbb{R} . فهي مستمرة على المجال $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

الدالة F المعرفة على $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ كما يلي : $F(x) = 3\sin x + 2\cos x$ هي دالة أصلية للدالة f

على $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \left[3\sin \frac{\pi}{2} + 2\cos \frac{\pi}{2}\right] - \left[3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= (3 \times 1 + 2 \times 0) - (3 \times (-1) + 2 \times 0) = 3 + 3 = 6$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx = 6 \quad \text{و بالتالي}$$

2 استعمال خاصية الخطية لحساب تكامل

تمرين 1

$$1. \text{ تحقق أن من أجل كل عدد } x \text{ من } \mathbb{R} - \{-1; 1\} : \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

$$2. \text{ احسب } \int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx$$

حل

$$1. \text{ من أجل كل عدد } x \text{ من } \mathbb{R} - \{-1; 1\} : \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} = \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(x - 1) - (x + 1)} = \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$\text{و بالتالي من أجل كل عدد } x \text{ من } \mathbb{R} - \{-1; 1\} : \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

$$2. \text{ حساب التكامل } \int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx$$

$$\text{لتكن } f \text{ الدالة حيث } f: x \mapsto \frac{2}{x^2 - 1}$$

الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$: و مستمرة على كل مجال محتوي في $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

إذن f مستمرة على المجال $[2; 3]$.

و بالتالي فهي تقبل على الأقل دالة أصلية على المجال $[2; 3]$.

$$\text{لدينا } \int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx = \int_2^3 \left[\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right] \, dx = \int_2^3 \frac{1}{x - 1} \, dx - \int_2^3 \frac{1}{x + 1} \, dx$$

(استعمال خاصية الخطية للتكامل)

الدالة F المعرفة على $[2; 3]$ كما يلي : $F(x) = \ln(x-1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ على $[2; 3]$.

والدالة G المعرفة على $[2; 3]$ كما يلي : $G(x) = \ln(x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على $[2; 3]$.

$$\int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = F(3) - F(2) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \quad \text{لدينا}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x+1} dx = G(3) - G(2) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

$$\int_2^3 \frac{2}{x^2-1} dx = \ln 2 - \ln \frac{4}{3} = \ln \frac{2}{\frac{4}{3}} = \ln \frac{3}{2} \quad \text{ينتج أن}$$

$$\int_2^3 \frac{2}{x^2-1} dx = \ln \frac{3}{2} \quad \text{إذن}$$

تمرين 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$: كما يلي : $f(x) = \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}$

1. اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 : $f(x) = 4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2}$

2. احسب $\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} dx$.

حل

1. من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 : $4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} = f(x)$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 : $f(x) = 4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2}$

2. حساب $\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} dx$

لدينا الدالة f مستمرة على كل من المجالين $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$.

لأنها دالة ناطقة. و بالتالي الدالة f مستمرة على المجال $[2; 4]$.

فهي تقبل دالة أصلية على المجال $[2; 4]$.

$$\int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} dx = \int_2^4 \left[4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx \quad \text{لدينا}$$

$$= \int_2^4 4(x-1) dx + \int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2} dx$$

الدالة F المعرفة على $[2; 4]$ كما يلي : $F(x) = 2x^2 - 4x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto 4(x-1)$

على $[2; 4]$. الدالة G المعرفة على $[2; 4]$ كما يلي : $G(x) = \frac{1}{x-1}$

هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{-1}{(x-1)^2}$ على $[2; 4]$.

$$\int_2^4 4(x-1) dx = F(4) - F(2) = [2(4)^2 - 4(4)] - [2 \times 2^2 - 4 \times 2] = 16 \quad \text{إذن}$$

$$\int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2} dx = G(4) - G(2) = \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{1}\right) = -\frac{2}{3} \quad \text{و}$$

$$\int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 4(x-1) dx + \int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2} dx = 16 - \frac{2}{3} = \frac{46}{3} \quad \text{ينتج أن}$$

$$\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} dx = \frac{46}{3} \quad \text{إذن}$$

3 استعمال علاقة شال

تمرين 1

$$1. \text{ احسب كلا من التكاملين } \int_0^3 x(x^2 + 1) dx \quad \text{و} \quad \int_{-3}^0 [-x(x^2 + 1)] dx$$

$$2. \text{ استنتج حساب التكامل } \int_{-3}^3 |x|(x^2 + 1) dx$$

حل

1. لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-3; 3]$ كما يلي : $f(x) = |x|(x^2 + 1)$ على المجال $[0; 3]$: $f(x) = x(x^2 + 1)$ و على المجال $[-3; 0]$: $f(x) = -x(x^2 + 1)$.
الدالة f مستمرة على كل من المجالين $[-3; 0]$ و $[0; 3]$. إذن تقبل على الأقل دالة أصلية على كل

من هذين المجالين. الدالة F المعرفة على $[-3; 0]$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$

هي دالة أصلية للدالة f على $[0; 3]$. و الدالة G المعرفة على $[-3; 0]$ كما يلي :

$$G(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{هي دالة أصلية } f \text{ على } [-3; 0].$$

$$\text{ينتج أن } \int_0^3 x(x^2 + 1) dx = F(3) - F(0) = \frac{99}{4} \quad \text{و} \quad \int_{-3}^0 [-x(x^2 + 1)] dx = \frac{99}{4}$$

$$2. \int_{-3}^3 |x|(x^2 + 1) dx = \int_{-3}^0 -x(x^2 + 1) dx + \int_0^3 x(x^2 + 1) dx = \frac{99}{4} + \frac{99}{4} = \frac{99}{2}$$

$$\text{أي } \int_{-3}^3 |x|(x^2 + 1) dx = \frac{99}{2}$$

تمرين 2

$$\text{احسب التكامل } \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$$

حل

لتكن f الدالة المعرفة على $[-1; 1]$ كما يلي : $f(x) = |e^x - 1|$

من أجل كل عدد x من المجال $[-1; 0]$: $f(x) = -(e^x - 1)$

و من أجل كل عدد x من المجال $[0; 1]$: $f(x) = e^x - 1$

الدالة f مستمرة على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $[0; 1]$. إذن تقبل دالة أصلية على الأقل على كل هذين المجالين.

الدالة F حيث $F(x) = -e^x + x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[-1; 0]$.

و الدالة G حيث $G(x) = e^x - x$ هي دالة أصلية للدالة f على $[1; 0]$.

$$\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx = \int_{-1}^0 -(e^x - 1) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx$$

$$= [F(0) - F(-1)] + [G(1) - G(0)] = \frac{1}{e} + e - 2$$

$$\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx = \frac{1}{e} + e - 2 \quad \text{إذن}$$

4 استعمال إيجابية التكامل

تمرين

$$1. \text{ اثبت أن } \int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx \geq 0$$

2. تحقق من ذلك بحساب هذا التكامل.

حل

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; \pi]$ كما يلي : $f(x) = x + 1 - \sin x$

لدينا من أجل كل عدد x من المجال $[0; \pi]$: $0 \leq \sin x \leq 1$

إذن من أجل كل عدد x من المجال $[0; \pi]$: $0 \leq 1 - \sin x$

ينتج أن من أجل كل عدد x من $[0; \pi]$: $x + 1 - \sin x \geq 0$

بما أن الدالة f مستمرة على المجال $[0; \pi]$ فإنها تقبل على الأقل دالة أصلية على $[0; \pi]$.

و بما أن من أجل كل عدد x من $[0; \pi]$: $x + 1 - \sin x \geq 0$ فإن $\int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx \geq 0$

2. التحقق من صحة هذه النتيجة حسابيا.

لدينا الدالة F المعرفة على $[0; \pi]$ كما يلي : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \cos x$ هي دالة أصلية

للدالة f على $[0; \pi]$.

$$\text{إذن } \int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx = F(\pi) - F(0) = \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \pi + \cos \pi \right) - \left(\frac{1}{2} \times 0 + 0 + \cos 0 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 1 - 1 = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2 \quad \text{إذن}$$

$$\text{و بالتالي } \int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2$$

$$\text{و بما أن } \pi - 2 > 0 \text{ فإن } \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2 > 0. \text{ ينتج أن } \int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx > 0$$

$$\text{أي أن } \int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx \geq 0$$

ملاحظة : إذا تحقق الشرط $f(x) \geq 0$ على المجال $[a; b]$ فإنه يضمن إيجابية التكامل

أي $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ والعكس غير صحيح يمكن أن يكون $\int_a^b (x + 1 - \sin x) dx > 0$ دون تحقق

الشرط $f(x) \geq 0$ على كل المجال $[a; b]$.

لاحظ المثال المضاد : $\int_2^4 (-x + 2) dx$ الدالة $-x + 2 \mapsto x$ ليست دوما موجبة على $[-2; 4]$

$$\text{و } \int_2^4 (-x + 2) dx = 6$$

تمرين 1

ليكن التكامل I التالي : $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{t}{1+t} \right) dt$ برهن أن $\frac{1}{8} \leq I \leq \frac{1}{3}$ ، بدون حساب التكامل I .

حل

من أجل كل عدد t من المجال $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$ ، $\frac{3}{2} \leq 1+t \leq 2$ و بالتالي من أجل كل عدد t

$$\text{من } \left[\frac{1}{2}; 1 \right] , \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{2}{3} .$$

وبما أن $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ إذن $\frac{1}{4} \leq \frac{t}{1+t} \leq \frac{2}{3}$

و بالتالي $\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \right) \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{t}{1+t} \right) dt \leq \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \right)$ (متباينة المتوسط).

أي أن $\frac{1}{8} \leq I \leq \frac{1}{3}$ و بالتالي $\frac{1}{8} \leq I \leq \frac{1}{3}$.

تمرين 2

a و b عدنان حقيقيان ينتميان إلى المجال $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ حيث $a < b$.

1. برهن أن من أجل كل عدد x من المجال $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$: $\frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b}$ ،

2. استنتج أن $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$

حل

1. بفرض $a \leq x \leq b$ ، ينتج أن $\cos a \geq \cos x \geq \cos b$ لأن الدالة \cos متناقصة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x من أجل $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$: $\frac{1}{\cos a} \leq \frac{1}{\cos x} \leq \frac{1}{\cos b}$

لأن $\cos a > 0$ و $\cos b > 0$ و $\cos x > 0$.

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$: $\frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b}$

2. بما أن من أجل كل عدد x من المجال $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$: $\frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b}$

فإن $\frac{1}{\cos^2 a} (b-a) \leq \int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} dx \leq \frac{1}{\cos^2 b} (b-a)$ (متباينة المتوسط)

أي أن $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq [\tan x]_a^b \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$

لأن الدالة $\tan x \mapsto x$ دالة أصلية للدالة $\frac{1}{\cos^2 x}$ على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

و بالتالي $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$

6 حساب القيمة المتوسطة لدالة

تمرين 1

ف هي الدالة المعرفة على المجال $[0; \frac{\pi}{6}]$ كما يلي : $f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{4})$
احسب القيمة المتوسطة للدالة ف على المجال $[0; \frac{\pi}{6}]$.

حل

الدالة ف مستمرة على المجال $[0; \frac{\pi}{6}]$ فهي تقبل على الأقل دالة أصلية على $[0; \frac{\pi}{6}]$.

الدالة F المعرفة كما يلي : $F(x) = \frac{1}{3} \sin(3x - \frac{\pi}{4})$ هي دالة أصلية للدالة ف على $[0; \frac{\pi}{6}]$.

$$\begin{aligned} \text{القيمة المتوسطة للدالة ف على } [0; \frac{\pi}{6}] \text{ هي } & \frac{1}{\frac{\pi}{6} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) dx \\ \text{لدينا } & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) dx = F(\frac{\pi}{6}) - F(0) = \frac{1}{3} \sin(3 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{3} \sin(-\frac{\pi}{4}) \\ & = \frac{1}{3} \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{إذن } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) dx = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ و بالتالي } \frac{1}{\frac{\pi}{6} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) dx = \frac{6}{\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$

ينتج أن القيمة المتوسطة للدالة ف حيث $f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{4})$ على المجال $[0; \frac{\pi}{6}]$ هي $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

7 استعمال المكاملة بالتجزئة

تمرين

احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$$\int_1^x \ln t dt \quad ; \quad \int_1^e x \ln x dx \quad ; \quad \int_0^1 (2-t) e^t dt \quad ; \quad \int_0^\pi (2x+3) \sin x dx$$

حل

$$\text{حساب التكامل } \int_0^\pi (2x+3) \sin x dx$$

نضع $v(x) = 2x+3$ و $u'(x) = \sin x$. إذن $v'(x) = 2$ و $u(x) = -\cos x$ (لأن الدالة v قابلة للاشتقاق على $[0; \pi]$ و الدالة u' مستمرة على $[0; \pi]$).

$$\begin{aligned} \text{و بالتالي } \int_0^\pi (2x+3) \sin x dx &= [-(2x+3) \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-2 \cos x) dx \\ &= 2\pi + 6 + 2 \int_0^\pi \cos x dx = 2\pi + 6 + 2 [\sin x]_0^\pi \\ &= 2\pi + 6 + 2 \times 0 = 2\pi + 6 \end{aligned}$$

$$\text{إذن } \int_0^\pi (2x+3) \sin x dx = 2\pi + 6$$

$$\text{حساب التكامل } \int_0^1 (2-t) e^t dt$$

نضع $u(t) = 2-t$ و $v'(t) = e^t$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $[0; 1]$ و الدالة v' مستمرة على $[0; 1]$. إذن $u'(t) = -1$ و $v(t) = e^t$.

$$\int_0^1 (2+t) e^t dt = \left[(2-t) e^t \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^t) dt = (-3e + 2) + \int_0^1 e^t dt$$

$$= e - 2 + [e^t]_0^1 = 2e - 3$$

وبالتالي $\int_0^1 (2-t) e^t dt = 2e - 3$

حساب التكامل $\int_1^e x \ln x dx$

نضع $u'(x) = x$ و $v(x) = \ln x$ الدالة u' مستمرة على $[1; e]$ والدالة v قابلة للاشتقاق على $[1; e]$. إذن $u(x) = \frac{1}{2} x^2$ و $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^e x \ln x dt = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{1}{2} x dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$$

وبالتالي $\int_1^e x \ln x dt = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$

حساب التكامل $\int_1^x \ln t dt$ حيث $x > 1$

نضع $u'(x) = 1$ و $v(t) = \ln t$ الدالة u' مستمرة على $[1; x]$ والدالة v قابلة للاشتقاق على $[1; x]$. إذن $u(x) = t$ و $v'(x) = \frac{1}{t}$

$$\int_1^x \ln t dt = \left[t \ln t \right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln x - \int_1^x 1 dt$$

$$= x \ln x - [t]_1^x = x \ln x - x + 1$$

ينتج أن $\int_1^x \ln t dt = x \ln x - x + 1$

8 تعيين الدالة الأصلية لدالة ، تنعدم عند عدد حقيقي معلوم

تمرين

$f(x) = \sqrt{x} \ln x$: كما يلي $]0; +\infty[$ هي الدالة المعرفة على
عين الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم عند العدد 1.

حل

الدالة f معرفة ومستمرة على $]0; +\infty[$. إذن f تقبل على الأقل دالة أصلية على $]0; +\infty[$.

الدالة الأصلية للدالة f على $]0; +\infty[$ والتي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة F المعرفة

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t} \ln t dt$$

حساب التكامل $\int_1^x \sqrt{t} \ln t dt$ باستعمال المكاملة بالتجزئة.

نضع $u'(t) = \sqrt{t}$ و $v(t) = \ln t$ الدالة u' مستمرة على $]0; +\infty[$ والدالة v قابلة للاشتقاق

على $]0; +\infty[$. إذن $u(t) = \frac{2}{3} t \sqrt{t}$ و $v'(t) = \frac{1}{t}$

$$\int_1^x \sqrt{t} \ln t dt = \left[\frac{2}{3} t \sqrt{t} \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{2}{3} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3} t \sqrt{t} \right]_1^x$$

$$= \frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + \frac{4}{9}$$

ينتج أن الدالة الأصلية f التي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة F المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + \frac{4}{9}$.

9 حساب مساحة حيز من المستوى

تمرين

احسب المساحة \mathcal{A} للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C}) الممثل للدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = \ln 2$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda > \ln 2$.

حل

الدالة f موجبة على المجال $[\ln 2; \lambda]$.

إذن المساحة هي العدد الموجب \mathcal{A} حيث $\mathcal{A} = \int_{\ln 2}^{\lambda} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$.

بوضع $u(x) = e^x + 1$. الدالة u معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[\ln 2; \lambda]$ و $u'(x) = e^x$.

إذن $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ يكتب على الشكل :

f تقبل دالة أصلية على $[\ln 2; \lambda]$ هي الدالة F المعرفة على المجال $[\ln 2; \lambda]$

كما يلي : $F(x) = \ln [u(x)]$. أي من أجل كل عدد x من $[\ln 2; \lambda]$: $F(x) = \ln (e^x + 1)$.

ينتج أن $\mathcal{A} = \int_{\ln 2}^{\lambda} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = F(\lambda) - F(\ln 2) = \ln (e^{\lambda} + 1) - \ln (e^{\ln 2} + 1)$

$$= \ln (e^{\lambda} + 1) - \ln 3 = \ln \left(\frac{e^{\lambda} + 1}{3} \right)$$

$$\mathcal{A} = \ln \left(\frac{e^{\lambda} + 1}{3} \right) \quad \text{و بالتالي}$$

10 حساب حجم حيز من الفضاء

تمرين

الرسم التالي يمثل المنحنى (\mathcal{C}) للدالة f المعرفة على $[0; 9]$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{9-x}$

1. احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز \mathcal{A} للمستوي الملون.

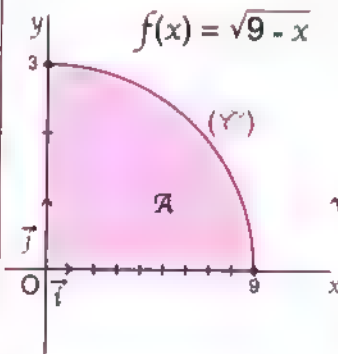
2. الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

عندما يدور المنحنى (\mathcal{C}) حول محور الفواصل، يولد مجسما S_1 حجمه V_1

و عندما يدور حول محور الترتيب يولد مجسما S_2 حجمه V_2 .

احسب الحجم V_1 حيث $\|\vec{i}\| = \frac{1}{3} \text{ cm}$ و $\|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \text{ cm}$

احسب الحجم V_2 حيث $\|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$ و $\|\vec{i}\| = \|\vec{k}\| = \frac{1}{3} \text{ cm}$



1. حساب مساحة الحيز \mathcal{A} .

الحيز \mathcal{A} هو الجزء المحدود بالمنحنى (\mathcal{C}) وبمحور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين $x = 0$ و $x = 9$.
وبما أن الدالة f موجبة على المجال $[0; 9]$ فإن $\mathcal{A} = \int_0^9 f(x) dx$.

حساب $\int_0^9 f(x) dx$.

لدينا من أجل كل عدد x من المجال $[0; 9]$: $f(x) = (9 - x)^{\frac{1}{2}}$.

الدالة F حيث $F(x) = -\frac{2}{3}(9 - x)^{\frac{3}{2}}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $[0; 9]$.

وبالتالي $\mathcal{A} = \int_0^9 f(x) dx = F(9) - F(0) = -\frac{2}{3}(9 - 9)\sqrt{9 - 9} + \frac{2}{3}(9 - 0)\sqrt{9 - 0} = 18$.

أي $\mathcal{A} = 18$ (وحدة المساحات).

وحدة المساحات هي $\frac{1}{3} \text{ cm}^2$ ينتج أن $\mathcal{A} = 6 \text{ cm}^2$.

2. حساب الحجم V_1 .

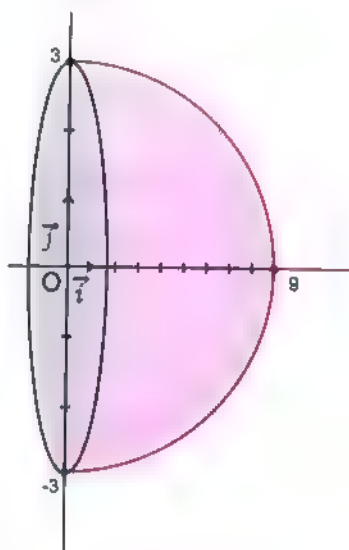
لدينا $V_1 = \int_0^9 S(t) dt$.

$$= \int_0^9 \pi \left[f(t) \right]^2 dt = \left[\pi \left(9t - \frac{1}{2} t^2 \right) \right]_0^9$$

$$= \pi \left(81 - \frac{81}{2} \right) - \pi \times 0 = \frac{81}{2} \pi$$

وحدة الحجم هي $\frac{1}{3} \text{ cm}^3$.

وبالتالي $V_1 = \frac{27}{2} \pi \text{ cm}^3$ أي $V_1 \approx 42,412 \text{ cm}^3$.



حساب الحجم V_2 .

لدينا $V_2 = \int_0^3 S(t) dt$.

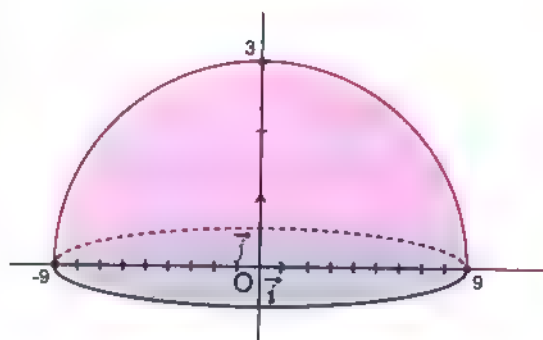
$$= \int_0^3 9\pi^2 dt = \left[(9\pi^2 t) \right]_0^3$$

$$= 9\pi^2 \times 3 = 27\pi^2$$

وحدة الحجم هي $\frac{1}{3} \text{ cm}^3$.

إذن $V_2 = 2\pi^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 \text{ cm}^3 = 3\pi^2 \text{ cm}^3$.

وبالتالي $V_2 \approx 29,609 \text{ cm}^3$.



تمرين 1

- f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R}^* كما يلي : $f(x) = x + \ln|x| + e^{-x}$ و (\mathcal{E}_f) المنحنى الممثل للدالة f في المسنوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 1cm)
1. ادرس تغيرات الدالة f .
 2. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (\mathcal{E}_f) .
 3. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 حيث $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$.
 4. عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (\mathcal{E}_f) عند النقطة A فاصلتها 1.
 5. ارسم (\mathcal{E}_f) .
 6. (D) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ و λ عدد حقيقي أكبر قماما من 1. احسب المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{E}_f) ، والمستقيم (D) والمستقيمين ذوي المعادلتين $x = \lambda$ و $x = 1$. احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. يعطي $\ln 2 \approx 0,69$: $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,65$.

حل

1. دراسة تغيرات الدالة f .
 f معرفة على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. (أي على \mathbb{R}^*).
 f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$.
ومن أجل كل عدد x يختلف عن 0 : $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - e^{-x}$.
دراسة إشارة $f'(x)$ على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$.
إذا كان $x < 0$ فإن $-x > 0$ وبالتالي $e^{-x} > 1$.
بما أن $1 + \frac{1}{x} < 1$ فإن $1 + \frac{1}{x} - e^{-x} < 0$ أي على المجال $]-\infty; 0[$: $f'(x) < 0$.
وبالتالي الدالة f متناقصة قماما على المجال $]-\infty; 0[$.
إذا كان $x > 0$ فإن $-x < 0$ وبالتالي $e^{-x} < 1$.
بما أن $1 + \frac{1}{x} > 1$ فإن $1 + \frac{1}{x} - e^{-x} > 0$ أي على المجال $]0; +\infty[$.
وبالتالي الدالة f متزايدة على المجال $]0; +\infty[$.
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x| = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$. إذن توجد حالة عدم التعيين.
لدينا من أجل $x < 0$: $f(x) = x + \ln(-x) + e^{-x} = -x \left(-1 + \frac{\ln(-x)}{-x} + \frac{e^{-x}}{-x} \right)$.
عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $-x \rightarrow +\infty$ وبالتالي $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$.

ينتج أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-x \left(-1 + \frac{\ln(-x)}{-x} + \frac{e^{-x}}{-x} \right) \right] = +\infty$
 من أجل $x > 0$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$
 إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x + e^{-x}) = +\infty$ بالتالي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

• جدول التغيرات

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (أي محور الترتيب)

مستقيم مقارب للمنحنى (\mathcal{C}_f) .

إذن المنحنى (\mathcal{C}_f) يقبل فرع قطع مكافئ منحاه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{\ln|x|}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = -\infty$

محور الترتيب. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = +\infty$

* إذن المنحنى (\mathcal{C}_f) يقبل فرع قطع مكافئ منحاه المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

تحديد الوضع النسبي للمنحنى (\mathcal{C}_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x$ بجوار $+\infty$.

لدينا من أجل كل عدد x أكبر تماما من 1 : $\ln x + e^{-x} > 0$ أي $f(x) - x > 0$

وبالتالي (\mathcal{C}_f) يقع فوق المستقيم ذي المعادلة $y = x$ على المجال $]1; +\infty[$.

3. الدالة f معرفة ومنتظمة ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$ و $f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا x_1 حيث $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,413$ و $f\left(\frac{1}{4}\right) \approx -0,357$ (إستعمال حاسبة)

وبالتالي (\mathcal{C}_f) يقطع محور الفواصل في النقطة فاصلتها x_1 حيث $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$.

لدينا كذلك f معرفة ومنتظمة ومتناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right]$.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0,456$ و $f\left(-\frac{1}{4}\right) \approx -0,358$ (باستعمال حاسبة)

و $f\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_2 حيث $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$.

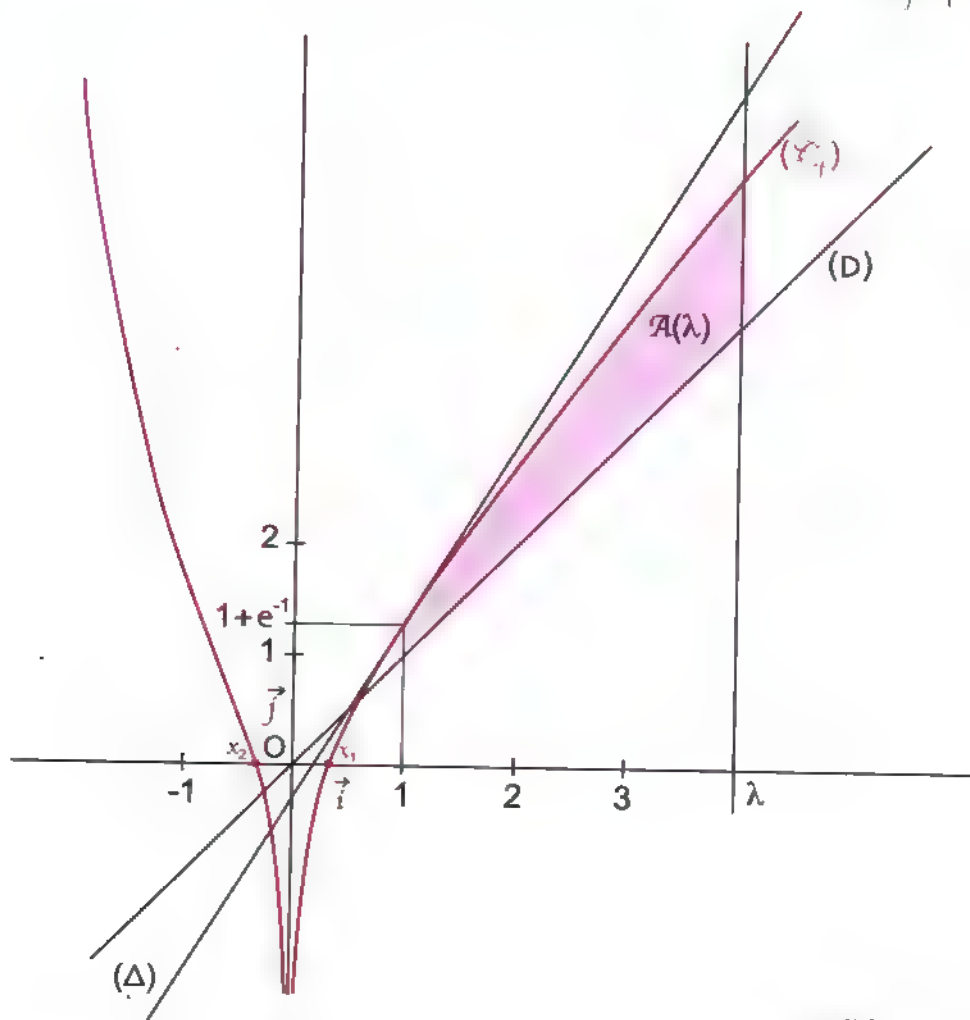
ينتج أن المنحنى (\mathcal{C}_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_2 حيث $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$.

4. معادلة المماس (Δ) عند النقطة A التي فاصلتها 1.

لدينا $f'(1) = 2 - \frac{1}{e}$; $f(1) = 1 + \frac{1}{e}$

معادلة (Δ) هي $y = \left(2 - \frac{1}{e}\right)x - 1 + \frac{2}{e}$

5. رسم (ξ_f) .



6. حساب $A(\lambda)$

على المجال $[1; +\infty[$: $f(x) - x > 0$ (لأن $\ln x \geq 0$ و $e^{-x} > 0$).

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda [f(x) - x] dx = \int_1^\lambda (\ln x + e^{-x}) dx \quad \text{إذن}$$

$$= \int_1^\lambda \ln x dx + \int_1^\lambda e^{-x} dx = [x \ln x - x]_1^\lambda + [-e^{-x}]_1^\lambda$$

$$= \lambda \ln \lambda - \lambda - e^{-\lambda} + 1 + \frac{1}{e} = \lambda \left[\ln \lambda - 1 - \frac{1}{\lambda e^\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda e} \right]$$

$$A(\lambda) = \left(\lambda \ln \lambda - \lambda - e^{-\lambda} + 1 + \frac{1}{e} \right) \text{ cm}^2 \quad \text{إذن}$$

حساب $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A(\lambda)$.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \left[\ln \lambda - 1 - \frac{1}{\lambda e^\lambda} + \frac{1}{\lambda e} + \frac{1}{\lambda} \right] = +\infty$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A(\lambda) = +\infty$$

إذن

تمرين 2

- g هي الدالة المعرفة بـ $g(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.
 (\mathbb{E}) المنحنى الممثل للدالة g في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. عين مجموعة التعريف D للدالة g .
 2. اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x من D ، $g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$.
 3. ادرس تغيرات الدالة g .
 4. ادرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة للمنحنى (\mathbb{E}) .
 5. حدد الوضع النسبي للمنحنى (\mathbb{E}) و المستقيم المقارب المائل (Δ) .
 6. ارسم المنحنى (\mathbb{E}) في المعلم السابق.
 7. a عدد حقيقي أكبر تماما من 4.
 احسب المساحة $S(a)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (\mathbb{E}) المستقيم المقارب (Δ) و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = a$ و $x = 4$.
 ما هي نهاية هذه المساحة لما يؤول a إلى $+\infty$ ؟

حل

1. $D = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.
 2. من أجل كل عدد x يختلف عن 1 : $x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-1)^2 + 3(x-1) + 1}{(x-1)^2}$
 $= \frac{x^3}{(x-1)^2} = g(x)$
- و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x من D : $g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]1; +\infty[$ و $]-\infty; 1[$

$$\text{و من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } D : g'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

إشارة $g'(x)$ على $\mathbb{R} - \{0\}$ ملخصة

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
$g'(x)$	+	○	+	-	○	+

في الجدول التالي

تمارين و حلول نموذجية

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي :

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	+	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$		$+\infty$	$\frac{27}{4}$	$+\infty$	

4. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (\mathcal{C}) .

من أجل كل عدد حقيقي x من D : $g(x) - (x + 2) = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (x + 2)] = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x + 2)] = 0$

بالتالي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مستقيم مقارب للمنحنى (\mathcal{C}) .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D : $g(x) - (x + 2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$

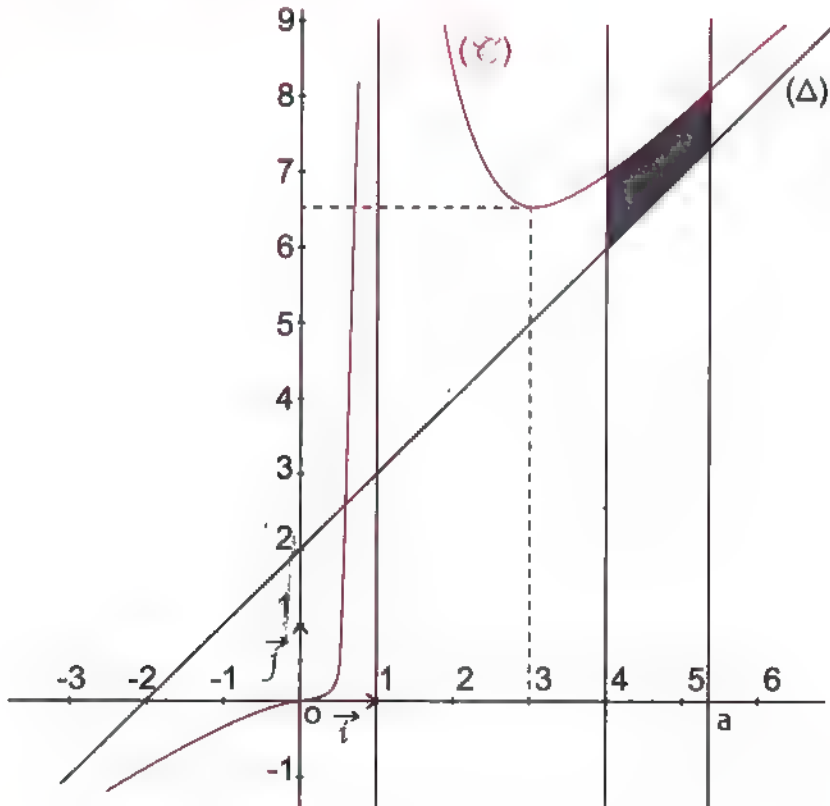
إشارة العبارة $g(x) - (x + 2)$ والوضع

النسبي للمنحنى (\mathcal{C}) والمستقيم (Δ)

ملخصة في الجدول المقابل

x	$-\infty$	1	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$g(x) - (x + 2)$	-	-	0	+
الوضع النسبي		(\mathcal{C}) تحت (Δ)	(Δ) فوق (\mathcal{C}) (\mathcal{C}) يقطع (Δ)	

5. رسم المنحنى (\mathcal{C}) .



6. حساب المساحة $S(a)$.

لدينا $g(x) - (x + 2) > 0$ على المجال $[4; +\infty[$.

إذن $S(a) = \int_4^a [g(x) - (x + 2)] dx$

$$= \int_4^a \left[\frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx = \left[3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} \right]_4^a$$

$$= 3\ln\left(\frac{a-1}{3}\right) - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{3}$$

إذن $S(a) = 3\ln\left(\frac{a-1}{3}\right) - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{3}$

لدينا $\lim_{a \rightarrow +\infty} 3\ln\left(\frac{a-1}{3}\right) = +\infty$ و $\lim_{a \rightarrow +\infty} -\frac{1}{a-1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ إذن $\lim_{a \rightarrow +\infty} S(a) = +\infty$.

مسألة

الجزء الأول

g هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1. عين نهايتي g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة g و انجز جدول تغيراتها.

3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

4. ادرس إشارة g على \mathbb{R} .

الجزء الثاني

f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي $f(x) = (2x - 5)(1 - e^x)$

(\mathcal{E}) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}, \vec{j}; 0)$.

1. ادرس إشارة f على \mathbb{R} .

2. عين نهايتي f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

3. احسب $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f . تحقق أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة.

4. استنتج اتجاه تغير الدالة f و انجز جدول تغيراتها.

5. أ) برهن أن $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة h المعرفة على المجال $\left] -\infty; \frac{5}{2} \right]$ كما يلي $h(x) = \frac{(2x - 5)^2}{2x - 7}$

ج) إنطلاقا من حصر العدد α المحصل عليه في الجزء الأول ، أعط حصر للعدد $f(\alpha)$.

د) برهن أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = 2x - 5$ مستقيم مقارب للمنحنى (\mathcal{E}) بجوار $+\infty$.

حدد الوضع النسبي للمنحنى (\mathcal{E}) والمستقيم (D).

تمارين و حلول نموذجية

6. ارسم المستقيم (D) والمنحنى (\mathcal{C}) في المعلم ($O; \vec{i}, \vec{j}$) (الوحدة 2cm).
7. λ عدد حقيقي أكبر تماما من $\frac{5}{2}$.
- عين المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C})، محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين $x = \lambda$ و $x = 0$. احسب نهاية $A(\lambda)$ لما يؤول λ إلى $+\infty$.

حل

الجزء الأول

الدالة g معرفة على \mathbf{R} و $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 7) = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

ولدينا أيضا $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 7) = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

2. الدالة g قابلة للاشتقاق على \mathbf{R} (لأنها مجموع دوال قابلة للاشتقاق على \mathbf{R})

و من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = 2e^x + 2$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x > 0$

وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي x : $2e^x + 2 > 0$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) > 0$

إذن الدالة g متزايدة تماما على \mathbf{R} .

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. الدالة g مستمرة على \mathbf{R} إذن g مستمرة على المجال $[0; 1]$.

الدالة g متزايدة تماما على \mathbf{R} إذن g متزايدة تماما على المجال $[0; 1]$.

لدينا $g\left(\frac{1}{2}\right) = -2,7$ و $g(1) = 2e + 2 - 7$ أي $g(1) \approx 0,44$ إذن $g(1) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

بما أن g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ و $g(1) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا واحدا α حيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

4. دراسة إشارة g على \mathbf{R} .

إشارة $g(x)$ ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

الجزء الثاني

الدالة f معرفة على \mathbb{R} و $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$.

1. دراسة إشارة f على \mathbb{R} .

إشارة f ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x - 5$	-	-	0	+
$1 - e^{-x}$	-	0	+	+
$g(x)$	+	0	-	+

2. تعيين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 5) = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

و لدينا أيضا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 5) = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

3. من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 2 + (2x - 7)e^{-x}$

نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2e^x + 2x - 7}{e^x}$

* و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

بما أن $e^x > 0$ على \mathbb{R} فإن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة.

إشارة $f'(x)$ ملخصة في الجدول التالي

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

4. من جدول إشارة $f'(x)$ ينتج أن

الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f يكون كالآتي

لدينا $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha})$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

5. أ) البرهان على أن $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$

نعلم أن $g(\alpha) = 0$ أي $2e^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0$ و منه $e^{\alpha} = \frac{7}{2} - \alpha$

لدينا $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha})$ أو $f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha}}\right)$

و بالتالي $f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 - \frac{1}{\frac{7}{2} - \alpha}\right)$ بعد التبسيط ينتج أن $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$

تمارين و حلول نموذجية

(ب) دراسة إتجاه تغير الدالة h على المجال $]-\infty; \frac{5}{2}]$.

$$h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7} \quad \text{لدينا}$$

الدالة h قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty; \frac{5}{2}]$.

$$h'(x) = \frac{(2x-5)(4x-18)}{(2x-7)^2} \quad ; \quad]-\infty; \frac{5}{2}] \quad \text{و من أجل كل عدد } x \text{ من}$$

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$	
$h'(x)$	+	○	-	-	○	+

إشارة $h'(x)$ على $\mathbb{R} - \{\frac{7}{2}\}$

ملخصة في الجدول المقابل

ينتج أن $h'(x) \geq 0$

على المجال $]-\infty; \frac{5}{2}]$ و بالتالي الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \frac{5}{2}]$.

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7} \quad \text{نعلم أن}$$

$$f(\alpha) = h(\alpha) \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \frac{5}{2}]$ و α ينتمي إلى هذا المجال

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{3} \quad \text{و} \quad h(0) = -\frac{25}{7} \quad \text{حيث} \quad h(0) < h(\alpha) < h\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{بما أن} \quad f(\alpha) = h(\alpha) \quad \text{و} \quad -\frac{25}{7} < h(\alpha) < -\frac{8}{3}$$

$$\text{إذن} \quad -\frac{25}{7} < f(\alpha) < -\frac{8}{3} \quad \text{أو} \quad -3,57 < f(\alpha) < -2,67$$

(د) لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x-5)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-(2x-5)e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{2x-5}{-e^x} \right) \right] = 0$$

ينتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x-5$ مستقيم مقارب للمنحنى (E) بجوار $+\infty$.

تحديد الوضع النسبي للمنحنى (E) و المستقيم (D).

$$\text{لذلك ندرس إشارة} \quad f(x) - (2x-5) \quad \text{لدينا} \quad f(x) - (2x-5) = -\frac{2x-5}{e^x}$$

إشارة $f(x) - (2x-5)$ ملخصة في الجدول المقابل.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x-5$	-	0	+
$f(x) - (2x-5)$	+	0	-

من الجدول السابق ينتج أن

(E) تحت (D) على المجال $]\frac{5}{2}; +\infty[$

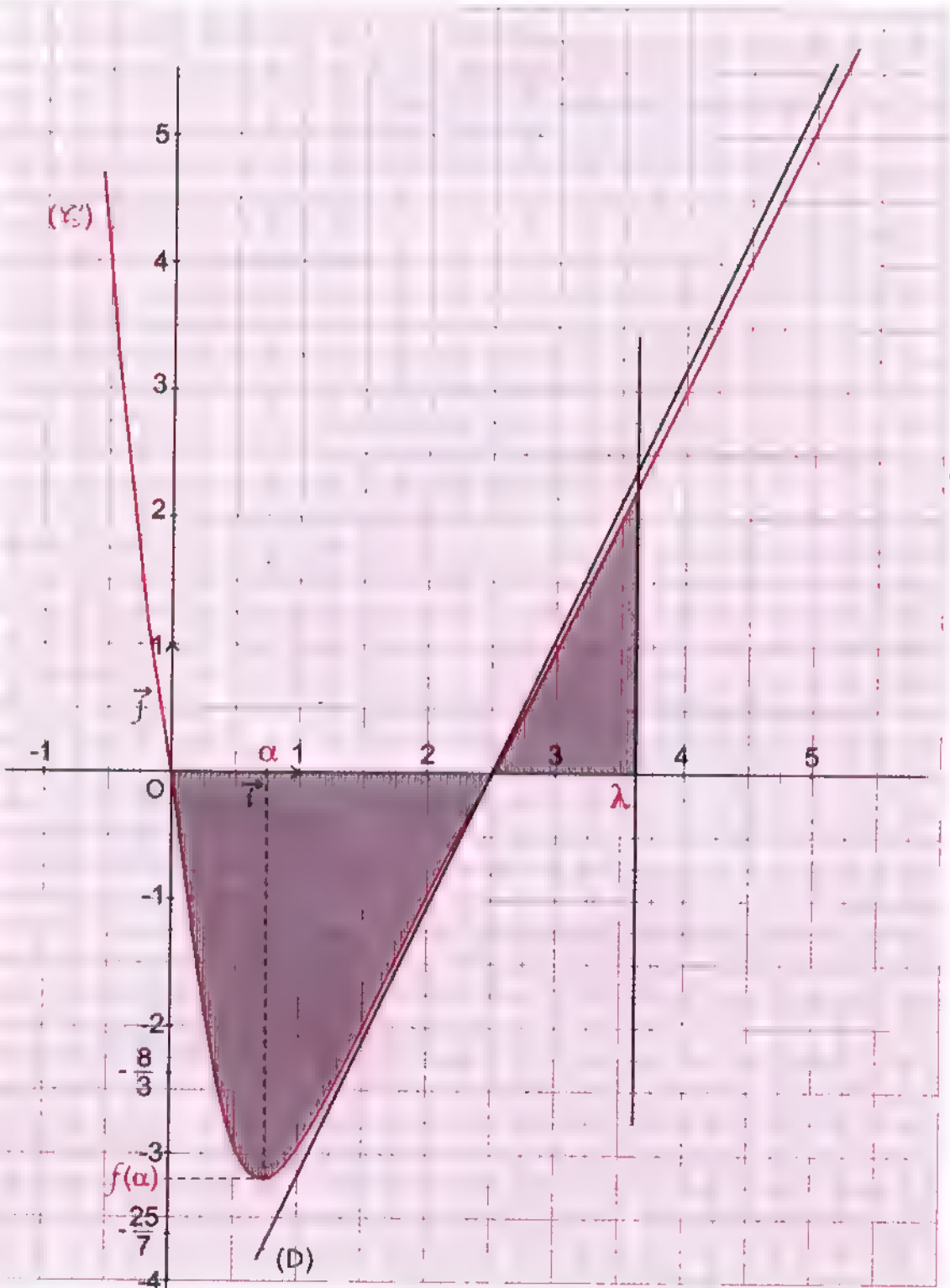
(E) فوق (D) على المجال $]-\infty; \frac{5}{2}[$

(E) يقطع (D) في النقطة ذات الفاصلة $\frac{5}{2}$.

3. رسم (E) و (D).

• الدالة f تقبل قيمة صغرى $f(\alpha)$ عند α .

• (E) يقطع محور الفواصل في النقطة O والنقطة ذات الفاصلة $\frac{5}{2}$.



تمارين و حلول نموذجية

7. الدالة f سالبة على المجال $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ و موجبة على المجال $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right]$

$$\text{إذن } A(\lambda) = -\int_0^{\frac{5}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} f(x) dx$$

حساب التكاملين السابقين باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$$A(\lambda) = -\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x}) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x}) dx$$

$$\text{نضع } u(x) = 2x-5 \text{ و } v'(x) = 1-e^{-x}$$

الدالة u قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و الدالة v مستمرة على \mathbb{R}

$$\text{إذن } u'(x) = 2 \text{ و } v(x) = x + e^{-x}$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x}) dx = \left[(2x-5)(x+e^{-x})\right]_0^{\frac{5}{2}} - \int_0^{\frac{5}{2}} 2(x+e^{-x}) dx$$

$$= \left[(2x-5)(x+e^{-x}) - (x^2 - 2e^{-x})\right]_0^{\frac{5}{2}}$$

$$= \left[(2x-3)e^{-x} + x^2 - 5x\right]_0^{\frac{5}{2}} = 2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4}$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x}) dx = 2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4} \quad \text{ينتج أن}$$

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x}) dx = \left[(2x-5)(x+e^{-x}) - (x^2 - 2e^{-x})\right]_{\frac{5}{2}}^{\lambda}$$

$$= \left[(2x-3)e^{-x} + x^2 - 5x\right]_{\frac{5}{2}}^{\lambda}$$

$$= (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4}$$

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x}) dx = (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4} \quad \text{ينتج أن}$$

$$A(\lambda) = -\left(2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4}\right) + (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4} \quad \text{إذن}$$

$$= (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2}$$

$$A(\lambda) = 4 \left[(2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2} \right] \text{ cm}^2 \quad \text{و بالتالي}$$

حساب $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2} \right) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (2\lambda-3)e^{-\lambda} = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A(\lambda) = +\infty \quad \text{إذن}$$

5 عين ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ

حيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0 و -1

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1}$$

احسب عندئذ التكامل $\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx$

6 x عدد حقيقي و I_1 و I_2 هما التكاملان

التاليان :

$$I_2 = \int_0^x \sin^2 t dt \quad \text{و} \quad I_1 = \int_0^x \cos^2 t dt$$

1. احسب $I_1 - I_2$ و $I_1 + I_2$

2. استنتج I_1 و I_2

3. تحقق من صحة نتائج ② بالتعبير عن $\cos^2 t$

و $\sin^2 t$ بدلالة $\cos 2t$.

استعمال علاقة شال

7 احسب التكاملات التالية :

$$\int_{-2}^4 |x^2 - 4| dx \quad ; \quad \int_{-1}^3 |x - 2| dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left| 2 - \frac{2}{x} \right| dx \quad ; \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$$

8 1. احسب التكاملين التاليين :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^2 (2t + 1) dt \quad \text{و} \quad \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-2t - 1) dt$$

2. استنتج حساب التكامل التالي : $\int_{-1}^2 |2t + 1| dt$

استعمال إيجابية التكامل

9 1. نقبل أن من أجل كل عدد حقيقي t موجب

$$\ln t \leq t - 1.$$

استنتج، بدون حساب، إشارة التكامل

$$\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt \quad \text{حسب قيم العدد } x \text{ الموجب تماما.}$$

2. تحقق أن الدالة $t \mapsto \frac{1}{2} t^2 - \ln t$

هي دالة أصلية للدالة $t \mapsto t - 1 - t \ln t$

على المجال $]0; +\infty[$.

استنتج حساب التكامل $\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt$

حساب تكاملات باستعمال دوال أصلية

1 احسب التكاملات التالية :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad ; \quad \int_2^4 \frac{1}{x} dx \quad ; \quad \int_{-1}^2 (x^2 + x) dx$$

$$\int_{-3}^{-1} (t + 3)^3 dt \quad ; \quad \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad ; \quad \int_{-3}^{-1} \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cos^3 \theta d\theta \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos \left(\frac{1}{2} x + \frac{\pi}{2} \right) dx$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{4 - x^2} dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{\cos x} dx$$

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \quad ; \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$$

استعمال خاصية الخطية

2 f دالة معرفة على المجموعة $R - \{-1; 1\}$

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 4} \quad \text{كما يلي :}$$

1. أثبت أنه يوجد عدداً حقيقياً α و β

حيث من أجل كل عدد x من $R - \{-2; 2\}$:

$$f(x) = \frac{\alpha}{x - 2} + \frac{\beta}{x + 2}$$

2. استنتج التكامل $\int_0^1 f(x) dx$

3 1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x

من $R - \{-1; 3\}$:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{4(x - 3)} - \frac{1}{4(x + 1)}$$

$$2. \text{ احسب } \int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$$

4 1. أوجد عددين حقيقيين a و b حيث من

أجل كل عدد x من $R - \{-1; 0\}$:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

2. احسب التكامل $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$

حساب المساحات

13 المستوي منسوب إلى معلم متعامد

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 5\text{cm} \quad (O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ و متجانس}$$

1. ارسم المنحنى (\mathcal{C}) الممثل للدالة f المعرفة على

$$\mathbb{R} \text{ كما يلي : } f(x) = x - x^3.$$

2. احسب بـ cm^2 : مساحة الحيز المستوي المحدود

بالمنحنى (\mathcal{C}) ، محور الفواصل و المستقيمين ذوي

$$\text{المعادلتين } x = 0 \text{ و } x = 1.$$

14 1. ارسم المنحنيين (\mathcal{C}_f) و (\mathcal{C}_g) المثلين

$$\text{للدالتين } f \text{ و } g \text{ المعرفتين كما يلي : } f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{و } g(x) = e^{x-1} \text{ في المستوي المنسوب إلى المعلم}$$

$$(O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ المتعامد و المتجانس.}$$

2. احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنيين

(\mathcal{C}_f) و (\mathcal{C}_g) و المستقيمين ذوي المعادلتين

$$x = e \text{ و } x = 1.$$

15 f هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$f(x) = xe^{-x} \text{ و } a \text{ عدد حقيقي موجب تماما.}$$

1. ارسم المنحنى (\mathcal{C}) الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{الوحدة } 4\text{ cm}.$$

2. احسب مساحة الحيز $\mathcal{A}(a)$ للمستوي المحدود

بالمنحنى (\mathcal{C}) ، محور الفواصل و المستقيم ذوي

$$\text{المعادلتين } x = a \text{ و } x = 0.$$

3. احسب نهاية $\mathcal{A}(a)$ عندما يؤول a إلى $+\infty$.

حساب القيمة المتوسطة لدالة

10 في كل حالة من الحالات التالية، احسب القيمة

المتوسطة u للدالة f بين a و b .

$$1. \quad b = 1, \quad a = 0 : f(x) = (x - 2)e^x.$$

$$2. \quad b = 0, \quad a = -\frac{\pi}{2} : f(x) = x \cos x + \sin x.$$

$$3. \quad b = e, \quad a = 1 : f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \ln x.$$

$$4. \quad b = \pi, \quad a = 0 : f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$5. \quad b = 16, \quad a = 1 : f(x) = \sqrt{x}.$$

$$6. \quad b = 3, \quad a = -3 : f(x) = x^2 - 9.$$

$$7. \quad b = \pi, \quad a = 0 : f(x) = \cos^2 x.$$

$$8. \quad b = \pi, \quad a = 0 : f(x) = \sin^2 x.$$

المكاملة بالتجزئة

11 احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة

بالتجزئة.

$$\int_0^1 (3 - t) e^t dt \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$$

$$\int_0^{\pi} (-x + 3) \cos x dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} (3x + 2) \sin x dx$$

$$\int_1^x \ln t dt \quad ; \quad \int_1^x t \ln t dt$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad ; \quad \int_0^2 x e^x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x - 1) \sin(2x^2 - x) dx \quad ; \quad \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt$$

12 احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة

بالتجزئة مرة واحدة أو أكثر.

$$\int_0^1 (3t^2 - t + 1) e^t dt \quad ; \quad \int_0^1 t^2 e^t dt$$

$$\int_0^{\pi} e^t \cos t dt \quad ; \quad \int_0^1 t^2 e^{3t} dt$$

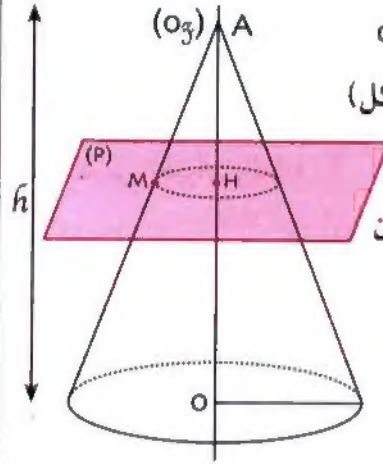
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} e^t \sin t dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t dt \quad ; \quad \int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$$

تمارين و مسائل

حساب حجم مخروط الدوران

16 مخروط رأسه A و محوره (Oz) و قاعدته



القرص الذي مركزه O و ارتفاعه h . (الشكل)

احسب حجم

هذا المخروط علما أن

نصف قطر قاعدته

هو R : ($R > 0$)

و $OH = \frac{h}{3}$

مسائل

17 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$: الوحدة 1 cm

1. ارسم المنحنى (\mathcal{C}) الممثل للدالة f المعرفة

كما يلي : $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

على المجموعة $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

2. احسب $\int_2^3 \ln(x-1) dx$

3. احسب بنفس الكيفية $\int_2^3 \ln(x+1) dx$

4. احسب مساحة الحيز \mathcal{A} المحدود بالمنحنى (\mathcal{C})

و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$x=2$ و $x=3$.

18 f هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

(\mathcal{C}) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب

إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(الوحدة هي 1 cm).

1. ادرس تغيرات الدالة f .

2. احسب مساحة الحيز المستوي \mathcal{A} المحدود بالمنحنى

(\mathcal{C}) و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$x=1$ و $x=e^2$.

19 f دالة معرفة على \mathbb{R}^* كما يلي :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$$

(\mathcal{C}_f) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب

إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

m عدد حقيقي حيث $m \geq 1$.

يرمز $\mathcal{A}(m)$ إلى التكامل $\int_1^m |2x - f(x)| dx$

1. احسب $\mathcal{A}(m)$ باستعمال المكاملة بالتجزئة.

2. احسب، إن وجدت، نهاية $\mathcal{A}(m)$

عندما يؤول m إلى $+\infty$.

20 f دالة معرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$f(x) = (2x-1)e^{-2x}$$

(\mathcal{C}_f) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب

إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(الوحدة 2 cm).

1. ادرس تغيرات الدالة f .

2. ارسم المنحنى (\mathcal{C}_f) في المعلم السابق.

3. λ عدد حقيقي أكبر تماما من $\frac{1}{2}$

و $\mathcal{A}(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدود

بالمنحنى (\mathcal{C}_f) و محور الفواصل و المستقيمين

ذوي المعادلتين $x=\lambda$ و $x=\frac{1}{2}$.

تمارين و مسائل

• بواسطة المكاملة بالتجزئة، احسب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ .

• احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

4. • نعتبر الدالتين h و H المعرفتين على \mathbb{R}

$$h(x) = (2x + 1)^2 e^{-4x} \quad \text{كما يلي :}$$

$$H(x) = \left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right) e^{-4x} \quad \text{و}$$

• يبين أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h على \mathbb{R} .

5. • ليكن S الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C})

ومحور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x = \frac{1}{2}$$

يرمز v إلى حجم الجسم المولد من دوران الحيز S حول

محور الفواصل.

نذكر أن v معبر عنه كما يلي: $v = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx$

• عين القيمة المضبوطة للحجم v بواسطة وحدة

الحجوم ثم قيمة مقربة للحجم v إلى 10^{-3} .

21 • f هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x \ln |x| \quad \text{إذا كان } x \in \mathbb{R}^* \quad \text{و} \quad f(0) = 0.$$

1. • هل الدالة f مستمرة عند العدد 0 ؟

هل هي قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

2. • ادرس تغيرات الدالة f و ارسم المنحنى (\mathcal{C})

الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد و متجانس (\vec{i}, \vec{j}) .

3. • باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب المساحة A

للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C}) ومحور الفواصل

و المستقيمين ذوي المعادلتين $x = \frac{1}{e}$ و $x = 1$.

22 • لتكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R}^+ كما يلي :

$$f(x) = x \ln x \quad \text{إذا كان } x \in]0 ; +\infty[\quad \text{و} \quad f(0) = 0.$$

1. • ادرس استمرارية الدالة f و قابلية اشتقاقها على

المجال $[0 ; +\infty[$.

2. • ادرس تغيرات الدالة f و ارسم المنحنى (\mathcal{C})

الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد و متجانس (\vec{i}, \vec{j}) .

3. • عدد حقيقي من المجال $]0 ; 1]$.

احسب، باستعمال المكاملة بالتجزئة، المساحة

$A(t)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (\mathcal{C})

و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$$x = t \quad \text{و} \quad x = 1.$$

احسب $\lim_{t \rightarrow 0} A(t)$.